14/12/16

ΡΙΖΕΣ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΛΗΜΜΑ: Αν $\nu \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ με $0<\varepsilon<1$ ώστε $(1+\varepsilon)^\nu < 1+3^\nu\varepsilon$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (επαγωγή) $\underline{\nu=1}$: $1+\varepsilon < 1+3\varepsilon$

Υποθέτω ότι ισχύει για $\nu=\kappa$, αρκεί ν.δ.ο η πρόταση ισχύει για $\nu=\kappa+1$ δηλ. αρκεί ν.δ.ο. $(1+\varepsilon)^{\kappa+1} < 1+3^{\kappa}\varepsilon$

Έχουμε:
$$
\begin{aligned}
(1+\varepsilon)^{\kappa+1} &= (1+\varepsilon)^\kappa\cdot(1+\varepsilon)\\
&< (1+3^\kappa\varepsilon)(1+\varepsilon)\\
&= \cancel{1+\varepsilon+3^\kappa\varepsilon} \; 1+3\cdot 3^\kappa\cdot\varepsilon\\
&= 1+3\cdot 3^\kappa\cdot\varepsilon\\
&= 1+3^{\kappa+1}\cdot\varepsilon
\end{aligned}
$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: $\left.\begin{array}{l}\forall \alpha\in\mathbb{R}_0^+\\ \forall n\in\mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists$ ακριβώς ένα $x\in\mathbb{R}_0^+ : x^\nu=\alpha$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αν $\alpha=0$, τότε $0^\nu=0=\alpha$

Υποθέτω ότι $\alpha>0$. Θεωρώ το $X=\{t\in\mathbb{R}^+ : t^\nu<\alpha\}$

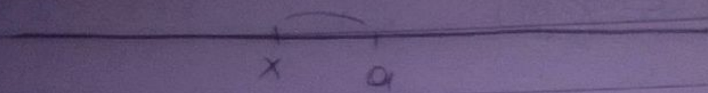
Παρατηρώ ότι $\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\nu < \frac{\alpha}{\alpha+1} < \alpha \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha+1} \in S \Rightarrow S\neq\emptyset$

Επίσης $(\alpha+1)^\nu > \alpha+1>\alpha>t^\nu$, $\forall t\in S$

δηλ. το S είναι άνω φραγμένο, άρα S φραγμένο.

Ας είναι $x = \sup S$. Θα αποδείξω ότι $x^{\nu} = a$.

i) $x^{\nu} < a$ θεωρώ $0 < \varepsilon < 1$ με $\varepsilon < \frac{a - x^{\nu}}{3x^{\nu}}$

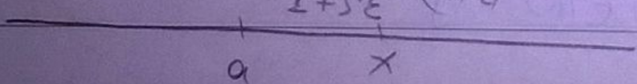


Είναι
$$[x \cdot (1+\varepsilon)]^{\nu} = x^{\nu}(1+\varepsilon)^{\nu} < x^{\nu}(1+3^{\nu}\varepsilon) = x^{\nu} + x^{\nu}\cdot 3^{\nu}\varepsilon < x^{\nu} + (a - x^{\nu}) = a$$

Δηλ. $x(1+\varepsilon)^{\nu} \in S$ με $\sup S' = x < x(1+\varepsilon)^{\nu}$ άτοπο!

ii) $x^{\nu} > a$ θεωρώ ότι $0 < \varepsilon < 1$ με

$$a < \frac{x^{\nu}}{1+3^{\nu}\varepsilon} < \left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^{\nu}$$



$$(1+3^{\nu}\varepsilon)\, a < x^{\nu}$$
$$a + 3^{\nu}\cdot\varepsilon\cdot a < x^{\nu}$$
$$\varepsilon < \frac{x^{\nu} - a}{3^{\nu} a}$$

$$\varepsilon < \frac{x^{\nu} - a}{3^{\nu} a}$$

Έχουμε $\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^\nu > \frac{x^\nu}{1+3^\nu\varepsilon}$

$$> \frac{x^\nu}{1+3^\nu \frac{x^\nu - a}{3a}}$$

$$= \frac{x^\nu}{\frac{a+x^\nu-a}{a}} = a \quad \text{δηλ. } a < \left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^\nu < x^\nu$$

Άτοπο!

Επομένως $x^\nu = a$

<u>Μοναδικότητα:</u> Ας είναι $x, y \in \mathbb{R}^+$ με $x^\nu = a$, $y^\nu = a$ και είναι $x<y$

Τότε $0 \le x^\nu < y^\nu \Rightarrow a < a$ άτοπο!

Ν.δ.ο. για $a, b > 0$ $\sqrt[\nu]{a} \cdot \sqrt[\nu]{b} = \sqrt[\nu]{a \cdot b}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$

Ισοδύναμα $x^\nu = a$

$y^\nu = b$

$(x \cdot y)^\nu = x^\nu y^\nu = a \cdot b$

$x y = \sqrt[\nu]{ab}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: $\left.\begin{matrix} \forall a, b \in \mathbb{R} \\ a < b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \exists q \in \mathbb{Q} \\ r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{matrix} : \begin{matrix} a < r \\ q < b \end{matrix}$

(A) $\exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$

Για $b - a > 0$, $\exists n \in \mathbb{N} : n(b-a) > 1$

$$nb - na > 1$$

$$nb > 1 + na$$

δηλ. $nb > 1 + na > na$

Έχουμε $na \notin \mathbb{N}$ τότε $\exists m \in \mathbb{N} : a < m \leq 1 + na$

Επομένως, $nb > 1 + na \geq m > na$

$$b > \frac{m}{n} > a$$

(B) $\exists r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \quad a < r < b$

Για $b - \frac{m}{n} > 0$ $\exists k \in \mathbb{N} : k\left(b - \frac{m}{n}\right) > \sqrt{2}$

$$kb - \frac{km}{n} > \sqrt{2}$$

$$kb > \sqrt{2} + \frac{km}{n}$$

$$b > \frac{\sqrt{2}}{k} + \frac{m}{n} > a$$

Αρκεί ν.δ.ο το $r = \frac{\sqrt{2}}{k} + \frac{m}{n} \notin \mathbb{Q}$, Πράγματι αν $\frac{\sqrt{2}}{k} + \frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N})$ τότε $\sqrt{2} = \left(\frac{a}{b} - \frac{m}{n}\right) k \in \mathbb{Q}$ άτοπο!

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν x ρίζα πολυωνύμου $P(x) = x^{v} + c_{v-1}x^{v-1} + \dots c_1 x + c_0$ με $c_0, \dots, c_{v-1} \in \mathbb{Z}$, τότε x ακέραιος ή x άρρητος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω ότι $\exists\, x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$: ρίζα του P με $(a,b)=1$

Τότε $\frac{a^{v}}{b^{v}} + c_{v-1}\frac{a^{v-1}}{b^{v-1}} + \dots + \frac{a}{b} + c_0 = 0 \Rightarrow$

$a^{v} = b\left[c_{v-1}a^{v-1} + b\,c_{v-2}a^{v-2} + \dots + c_0 b^{v-1}\right] \Rightarrow$

$b \mid a \Rightarrow b \mid a$
$(b,a)=1$

* Αλγεβρικός αριθμός: πραγματικές ρίζες πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές

Μη αλγεβρικοί άρρητοι: Υπερβατικοί // με $\mathbb{Q}$